OORSPRONKELIJKE BIJDRAGEN

VOORDRACHTEN OVER DE THEORIE DER PROTHODONTIE

DOOR

B. R. BAKKER.

(Vervolg).

In de laatste voordracht trachtten wij een dooreenhaspeling der begrippen normaal en ideaal te ontwarren. Indien slechts de auteurs in kwestie voor één begrip twee woorden bij afwisseling bezigden, dan zoude men hen om hun taalrijkdom kunnen benijden. Waar echter het omgekeerde het geval is en zij dus niet woorden te veel, maar begrip te weinig toonden, leek het gewenscht hier een poging te doen tot het scheppen van meer helderheid.

Thans dienen wij het door ons ontwikkelde normaliteitsbegrip in meer direct verband te brengen met de feitelijke gegevens, waarop het in concrete gevallen berust.

Het ligt klaarblijkelijk voor de hand om als norm eener collectiviteit het gemiddelde te nemen der uitkomsten van een aantal aan de afzonderlijke leden dier collectiviteit verrichte metingen. De gevallen althans, waarin schrijvers als resultaat hunner metingen slechts de gemiddeld verkregen waarden vermelden met de uitgesproken, of als vanzèlfsprekende en dus niet nadrukkelijk vermelde bedoeling dit gemiddelde als norm te doen fungeeren, zijn lang niet zeldzaam. Onder het gemiddelde verstaan zij dan het rekenkundig gemiddelde van alle gevonden waarden. Iets vollediger worden de mededeelingen van hen, die ook nog de gevonden minima en maxima en het aantal verrichte waarnemingen noemen. Vooral als het laatste getal groot is, wordt het met vreugde vermeld.

Ook al deze gegevens te zamen zijn echter, zooals zal blijken, onvoldoende om een overzicht te hebben over wat werkelijk gevonden is en om dit te kunnen vergelijken met andere onderzoekingen van denzelfden aard.

Wij zullen, vóór we de vraag onder het oog zien, òf men het rekenkundig gemiddelde van een serie metingen inderdaad mag beschouwen als norm, als de meest vóórkomende waarde dus, nog hebben te bespreken welke factoren invloed hebben op de meerdere of mindere juistheid van het gevondene ten opzichte van het werkelijke gemiddelde. Deze twee zijn natuurlijk zelden of nooit identiek. Gesteld dat U de gemiddelde lengte interesseert van de volwassen mannelijke inwoners van Amsterdam, dan zou U de *werkelijke* gemiddelde lengte te weten kunnen komen als U *alle* volwassen mannelijke Amsterdammers onder den maatstok ging zetten en uit al deze maten het gemiddelde berekende. Een dergelijk experiment zou wel niet gemakkelijk zijn te organiseeren. Allicht zou, hoewel Amsterdammers dol op meetings zijn, één enkele hunner op Uw metingsdag iets anders te doen hebben en niet verschijnen. Zijn lengte mist gij in Uw kolommen. Zal dit de nauwkeurigheid van het berekende resultaat schaden? En als eens tien of honderd of tienduizend Amsterdammers hadden ontbroken op Uw appèl? *Hoeveel* mogen er ontbreken, voor gij bevreesd behoeft te zijn voor een te groot verschil tusschen het gemiddelde, dat gij hebt gevonden door alle — x Amsterdammers te meten en het werkelijk gemiddelde van *alle* Amsterdammers? Vooropgesteld, dat het wel bijna altijd onmogelijk zal zijn om alle individuen eener uitgebreide collectiviteit te bereiken, kan men beter de vraag aldus formuleeren: hoeveel leden eener collectiviteit dient men te meten om met een vooraf bepaalde graad van nauwkeurigheid de verlangde gemiddelde maat dier collectiviteit vast te stellen? In de eerste plaats hangt dit aantal natuurlijk af van de verlangde graad van nauwkeurigheid zelf. Even vanzelfsprekend heeft het in het algemeen geen zin om deze in het eind-resultaat hooger op te willen voeren dan de eenheden, waarmede men werkelijk meet.

Het is malligheid de gemiddelde lengte van den mensch aan te willen geven in microns of in golflengten van ultra-violet licht. Grooter nauwkeurigheid dan in m.M. mag in dezen overbodig en onmogelijk genoemd worden. Vertoon van grooter nauwkeurigheid bewijst niet steeds dieper wetenschappelijke zin. Voor verweg de meeste, zoo niet voor alle, schedelmaten geldt precies hetzelfde. In de tweede plaats is het aantal te verrichten metingen afhankelijk van de meerdere of mindere homogeniteit van het materiaal. Sterke verschillen tusschen de individuen verhoogen het aantal te verrichten waarnemingen. Dit aantal kan dus aanleiding geven tot kritiek; niet alleen omdat het te klein, maar ook omdat het noodeloos veel te groot kan worden genomen. Door een paar voorbeelden wensch ik dit toe te lichten.

Van Bonwill geldt, dat hij om de afstand tusschen de centra der onderkaakscondyli te bepalen 10000 schedels heeft gemeten. Als gemiddelde van al deze metingen wil hij gevonden hebben 4 inch. De afwijkingen hiervan bedragen, zegt hij, nooit meer dan ¼ inch, dus $^1/_{16}$ van de totale maat. Om dit $^1/_{16}$ gemakkelijk te kunnen verwerken stel ik een inch gelijk aan 24 m.M. Onze beschouwingen ondervinden van deze onjuistheid geen invloed. Bonwills standaardmaat wordt dan dus 96 m.M. en de maximaal waargenomen afwijkingen hiervan bedragen 6 m.M. Omdat ons nadere gegevens ontbreken kunnen wij hiermee slechts een „schoolvoorbeeld" construeeren. *Stel* eens, dat Bonwill 10 schedels onderzocht waarvan de maten zijn weergegeven in de eerste kolom van onderstaande tabel.

	$C_L - C_R$	δ	δ^2
n=10	90	−6	36
	92	−4	16
	93	−3	9
	94	−2	4
	95	−1	1
	97	+1	1
	98	+2	4
	99	+3	9
	100	+4	16
	102	+6	36
	S = 960		132

$$m = \frac{S}{n} = 96$$

$$\varepsilon\, \delta^2 = 132$$

$$f_m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon\, \delta^2}{n\,(n-1)}} = \pm 1,2$$

$$f_w = 0.674 \times f_m = \pm 0,8$$

(δ is de individueele afwijking van het gemiddelde).

Volgens deze tabel zou inderdaad het gemiddelde *m* van *n* metingen 96 m.M bedragen en de devitatie δ zou nergens grooter zijn dan 6 m.M. Uit een dergelijke volledige tabel nu zijn conclusies te trekken. Men kan zich omtrent de betrekkelijke waarde van ieder der metingen en van het gevonden gemiddelde een denkbeeld vormen. De waarschijnlijkheidsrekening geeft hiertoe formules, met welker afleiding wij ons hier niet behoeven bezig te houden. De samenstelling der formule $f_m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon\, \delta^2}{n\,(n-1)}}$ is zonder meer duidelijk. Haar beteekenis gecombineerd met $f_w = 0{,}674 \times f_m$ is voor het onderhavige geval deze, dat het gevonden gemiddelde van 96 m.M. *waarschijnlijk* juist is tot op 0,8 m.M. of m. a. w. dat een vernieuwd onderzoek aan tien soortgelijke objecten 50 % kans zou hebben een gemiddelde te leveren tusschen 96 + 0,8 en 96 — 0,8 en dus ook 50 % kans zou hebben een resultaat te geven, dat buiten deze grenzen valt. Dit wil evenwel niet zeggen dat de meting van slechts 10 schedels dus practisch waardeloos zou zijn. Een nieuwe uitkomst zal niet uit ieder ander willekeurig cijfer kunnen bestaan. Een afwijking grooter dan 5 maal de waarschijnlijke zal slechts één maal in de 1300 meet-reeksen, grooter dan 7 maal slechts eens op de 400 000 voorkomen. [1]) Verder is de waarschijnlijke afwijking evenredig aan de wortel uit het aantal trekkingen. Onder overigens gelijk omstandigheden wat de deviaties betreft, zal dus de variatie-breedte van het gemiddelde x maal kleiner worden indien men het aantal metingen x^2 maal vergroot. Indien gemeten wordt tot op 1 m.M. nauwkeurig is een variatie-breedte van 0,8 m.M., waar buiten met *overgroote* waarschijnlijkheid de uitkomst van een nieuw onderzoek niet zal vallen zeker voldoende te achten. Wordt derhalve het aantal metingen waarvan wij uitgingen met $2^2 \times 5^2$ dus met 100 vermenigvuldigd, dan zou met haast bovenmenschelijke zekerheid het resultaat van een dergelijk onderzoek vaststaan. Inderdaad grenst een meterij van 1000

[1]) Schuh: De waarschijnlijkheidsrekening en het Theorema van Bernouilli.

schedels alleen om een gemiddelde te vinden al vrijwel aan het absurde. Volledigheidshalve merk ik nog op, dat bij een werkelijk onderzoek de afwijkingen der individueele maten van het gemiddelde nooit zoo ongunstig gelegen zullen zijn als in het door ons veronderstelde geval. De „bijna gemiddelden" zullen zich veel meer om het gemiddelde opeenhoopen, waardoor $\varepsilon\, \delta^2$ en daarna dus f_w relatief véél kleiner wordt. Practisch gesproken zou dan ook een onderzoek als het besprokene aan 100 schedels ruim voldoende materiaal hebben gehad. Als Bonwill dus 10 000 heeft gemeten, kunnen wij zijn geduld bewonderen, maar toch ook de verspilde energie betreuren.

Beschouwen we thans een tweede voorbeeld, dat aan de werkelijkheid is ontleend.

Sicher en *Krasa*[1]) meenen te hebben aangetoond, dat de profielverandering bij klasse II-occlusie berust op verkorting van de onderkaak. Hun desbetreffende bewijsvoering is gebaseerd op meting van 26 „normale eury- en mesoprosope schedels" en van *vier* pathologische schedels der klasse II. De verhouding tusschen schedel- en onderkaakslengte wordt uitgedrukt door den index $I = \frac{\text{basion} - \text{nasion} \times 100}{\text{onderkaakslengte}}$.

De gemiddelde indices der te vergelijken groepen worden door de auteurs berekend uit de gemiddelden der door hen genomen maten. Voor de 26 normale[2]) kaken is B. N. gemiddeld 98,8 en de onderkaakslengte 104,8 m.M. Derhalve is, zeggen Sicher en Krasa, de normale index 94,3. Voor de pathologische schedels stellen zij aldus als gemiddelde vast B.N. = 98, onderkaakslengte = 99, derhalve is de pathologische index 99, welke die der normale schedels met 4,7 overtreft. De schrijvers verstrekken ons met prijzenswaardig accurate methodiek tabellen, welke eenige contrôle op hunne resultaten

[1]) Anatomische Untersuchungen an Schädeln mit Stellungsanomalien der Zähne. O. Z. f. Stomatologie 1920. H. 10.

[2]) *Hier* beteekent normaal dus zoo iets als: oppervlakkig gezien zonder pathologische afwijkingen.

mogelijk maken. Het wil mij echter voorkomen, dat zij zelf deze contrôle verzuimden. Het moet hun n.l. bekend zijn, dat de verkregen gemiddelden slechts relatieve waarde hebben. Indien wij de voor de normale gevallen gevonden waarden *a* en *b* noemen, en die voor de pathologische gevallen a_1 en b_1, dan lijdt ieder dezer waarden aan een waarschijnlijke fout α, β, α_1 en β_1, welke uit de tabellen II en V der auteurs berekend kunnen worden op de reeds hierboven geschetste wijze.

Deze berekening geeft het volgende staatje:

bij a $=$ 98,8 is $\alpha = \pm$ 0,69
bij b $=$ 104,8 is $\beta = \pm$ 0,82
bij $a_1 =$ 98,— is $\alpha_1 = \pm$ 1,05
bij $b_1 =$ 99,— is $\beta_1 = \pm$ 2,70

Met deze serie waarschijnlijke fouten moet men rekening houden als men de op de gevonden gemiddelde maten berustende indices wil gaan vaststellen. Deze zullen natuurlijk ook slechts betrekkelijk juist zijn, en eveneens een waarschijnlijke fout in zich bergen. Voor de normale gevallen kan deze worden berekend uit de formule

$$\varepsilon_{i.n} = \pm\, 100\, \frac{\sqrt{\alpha^2\, b^2 + \beta^2\, a^2}}{b^2}$$ [1]

en voor de pathologische gevallen vertoont zij de corresponderende vorm

$$\varepsilon_{i.p.} = \pm\, 100\, \frac{\sqrt{\alpha_1^2\, b_1^2 + \beta_1^2\, a_1^2}}{b_1^2}$$

Voor de eerste vond ik $\pm$ 1,10 en voor de laatste $\pm$ 2,96. Derhalve zou een nieuw onderzoek voor de normale gevallen met 50 % kans een index kunnen opleveren tusschen 93,2 en 95,4, echter ook met 50 % kans er een kunnen geven, die buiten deze grenswaarden valt. Voor de abnormale gevallen zijn dezelfde grenswaarden 96,04 en 101,96. Ieder der schommelingen kan, onafhankelijk van de andere, zoowel naar den positieven als naar den negatieven kant uitslaan. De mogelijkheid is derhalve lang niet uitgesloten, dat de combinatie I_n = 95,4 en I_p = 96,04 zou ontstaan, waarbij het verschil slechts

[1]) Men vergelijke hierbij, Rud. Martin: Lehrbuch der Anthropologie.

0,64 bedraagt. De formuleering van Sichers conclusie „Daraus läszt sich wohl mit Sicherheit schlieszen, dasz im allgemeinen, die Veränderung der Profillinie (voor klasse II n.l.) auf eine Verkürzung des Unterkiefers beruht" komt mij dan ook ietwat onvoorzichtig voor.

In los-vast verband met het thans behandelde meen ik nog een enkele opmerking te moeten maken. In tabel II zijner publicatie geeft Sicher o.a. de basion-nasion maten der normale schedels met als gemiddelde 98,8. Uit dezen tabel laat zich f_w berekenen. Deze bedraagt 0,68. Zooals straks opgemerkt is er 1 kans tegen 1300 dat een nieuw onderzoek een gemiddelde zal geven dat 5 maal de f_w d. i. dus 3,40 afwijkt van het reeds gevondene. Zóó'n geluk nu was niet voor me weggelegd. Maar treffend is wel, dat Adams[1]) na onderzoek van 111 Europeesche schedels als gemiddelde B.N. 95,9 vond, een afwijking van 2,9 dus. Hiermee wensch ik geen oordeel uit te spreken over de metingen van Sicher, nòch over die van Adams. Het lijkt me echter niet onwaarschijnlijk, dat de techniek van het meten eigenaardige moeilijkheden heeft, en dat men *reeds hierom alleen* zeer voorzichtig *al* dergelijke cijfers moet aanvaarden.

Het zou niet moeilijk zijn de gegeven voorbeelden met vele andere te vermeerderen. Deze reeds echter zijn voldoende om te doen zien, dat het bepalen van gemiddelden een bezigheid is waarbij men met eenig systeem moet te werk gaan en óók, dat gemiddelden in de vakliteratuur slechts als bruikbaar materiaal kunnen worden aanvaard, als hun geheele wordingswijze behoorlijk is te controleeren.

De hierboven gesignaleerde gebreken hebben echter toch eigenlijk slechts betrekking op een onjuiste techniek in het vaststellen van het gemiddelde. Men kan ze toevallig fouten noemen. Tegen het aanvaarden van het gemiddelde als *norm* bestaan echter andere bezwaren; als zoodanig bezit het con-

---

[1]) *Eugen Adams:* Uber die Stellung des Obergesichtes zur Schädelbasis u. s. w. Deutsche Zahnheilkunde. H. 40.

stitutioneele fouten. Zij, die à priori aannemen, dat de gemiddelde waarde ook inderdaad en altijd de meest voorkomende waarde zou zijn, kunnen de juistheid dezer veronderstelling nooit bewijzen. Ook zegt het gemiddelde in vele gevallen *te weinig* omtrent de collectiviteit, welke men er mee wil karakteriseeren. Zoowel de ontoereikendheid als de onjuistheid zijn gemakkelijk te demonstreeren met een voorbeeld uit een tandheelkundig-neutrale zône.

Volgens de dagelijksche waarnemingen van het Meteorologisch Instituut te de Bildt bedroeg in 1922 het totaal der neerslag 650 m.M.[1]) De gemiddelde neerslag per dag laat zich dus berekenen op 1,78 m.M. Wat zegt dit gemiddelde aan iemand, die gaarne op de hoogte zou zijn van ons klimaat te dezen opzichte? Op velerlei manieren kan immers dit gemiddelde tot stand komen. De neerslag kàn elken dag ongeveer 1,78 m.M. bedragen, maar ook is denkbaar, dat 50 dagen in het jaar ieder 13 m.M. opleveren en de overige dagen kurkdroog zijn. De 365 waarnemingen laten zich derhalve niet zonder meer in één cijfer samendrukken zonder bijna alle waarde te verliezen. Een andere wijze van werken is noodig. Men groepeert ze in klassen. In dit geval zou men klassen kunnen kiezen, die b.v. met 1 m.M. opklimmen en dan de frequentie kunnen noteeren van de binnen de grenzen van het gekozen interval vallende waarnemingen. Aldus:

	0	< 1	< 2	< 3	< 4	< 5	< 6	< 7	< 8	< 9	<10	<11	<12
dagen	203	77	**23**	14	7	17	7	8	5	2	0	2	3

Uit deze indeeling blijkt reeds dat de gemiddelde stellig niet de meest voorkomende waarde is. Hierin zou géén verandering komen bij beschouwing der waarnemingen van b.v. 10 jaren. Wel zouden dan enkele onregelmatigheden in de afname der frequenties van links naar rechts verdwijnen.

Stelt men op grond hiervan de frequenties min of meer schematisch in een kromme voor, dan ontstaat een lijn als in fig. 3 is weergegeven, een z.g.n. frequentiekromme. Deze geeft

[1]) Cijfers uit de maandelijksche overzichten van het Instituut.

een volkomen overzichtelijk beeld van de collectiviteit, welke wij wenschten te beschouwen, en toont duidelijker nog dan de tabel, dat het gemiddelde 1,78 *niet* het talrijkst voorkomt.

Nu zij direct toegegeven, dat niet altijd een frequentie-kromme asymmetrisch behoeft te zijn. Wij hadden in plaats van den neerslag ook de luchtdrukking gedurende den loop van een jaar kunnen kiezen als voorbeeld. Het gemiddelde van 365 waarnemingen bedrage 760 m.M. Plaatsen wij die waarnemingen in groepen, welke zich telkens over 10 m.M. uitstrekken en respectievelijk 740, 750, 760, 770 en 780 tot centrale

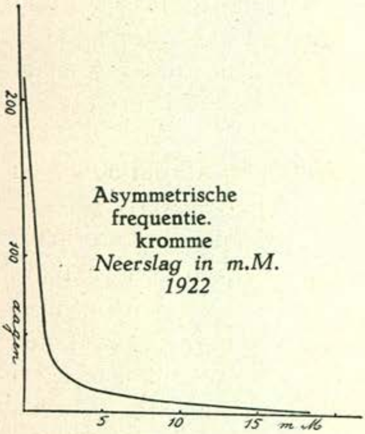


fig. 3.

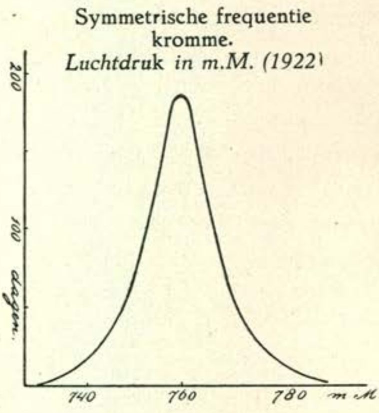


fig. 4.

waarde hebben, dan vallen in deze groepen 12, 71, 187, 87 en 8 waarnemingen. Deze op dezelfde wijze als daar straks in grafische voorstelling gebracht geven ons fig. 4.

In *deze* serie blijkt inderdaad de gemiddelde waarde tevens de meest voorkomende, of althans de centrale waarde te zijn, waaromheen zich de talrijkst voorkomenden dicht opeenhoopen. *De frequentie-kromme is in deze gevallen symmetrisch.*

De cardinale vraag is nu natuurlijk welke vorm de frequentie-kromme aan zal nemen, welke men volgens aan het skelet of aan het levend individu verrichte metingen kan construeeren. Voor zoover mij bekend komen volstrekt asymmetrische krommen, welke dus in de ordinaat hun maximum vinden, niet voor. Men zal, voorop gesteld dat verschijningsvormen worden onderzocht, welker ontstaan in het algemeen het resultaat is van eenzelfde complex oorzaken, een kromme vinden met één maximum, waarvan de *ideale* vorm reeds in fig. 4 werd weergegeven. Cijfers Amsterdam betreffende staan mij op het oogenblik niet ten dienste. Hoogstwaarschijnlijk zouden de straks voorgestlede *lengte*metingen echter een symmetrische kromme leveren, welke den idealen vorm zeer dicht nadert. Engelsche onderzoekingen betreffende 8595 volwassen, op de Britsche eilanden geboren mannen leverden althans dit resultaat. [1]) *Gewichts*bepalingen daarentegen, door dezelfde onderzoekers verricht bij 7749 specimen van hetzelfde materiaal leverden een asymmetrische kromme van het type als we hieronder in fig. 5 vinden. [2])

Volgens Rautmann, en ook volgens Schuh, schijnt de streng symmetrische kromme in de anthropometrie dan ook eer uitzondering dan regel te zijn.

Voor een der op prothetisch terrein liggende grootheden, n.l. de hoek, die de condylusbaan maakt met het door spina nasalis anterior en meatus acusticus externus bepaalde vlak construeerden wij de frequentiekromme volgens door Gysi [3]) verstrekte gegevens, welke zich voor illustratie van ons betoog uitmuntend leent.

Gysi berekende het gemiddelde uit een aantal waarnemingen en laat dit gemiddelde gebruiken door degenen, die niet met een verstelbaren articulator willen werken en toch zoo goed mogelijk de kaakbeweging van een zoo groot mogelijk aantal patiënten willen benaderen. M. a. w., Gysi laat het gemiddelde voor norm fungeeren. De frequentie-kromme echter leert dat niet het gemiddelde van Gysi's gegeven, d. i. 32,4, het talrijkst voorkomt, maar dat een helling van 37,7 het meest frequent is. In gedeeltelijke navolging van Yule zou ik willen

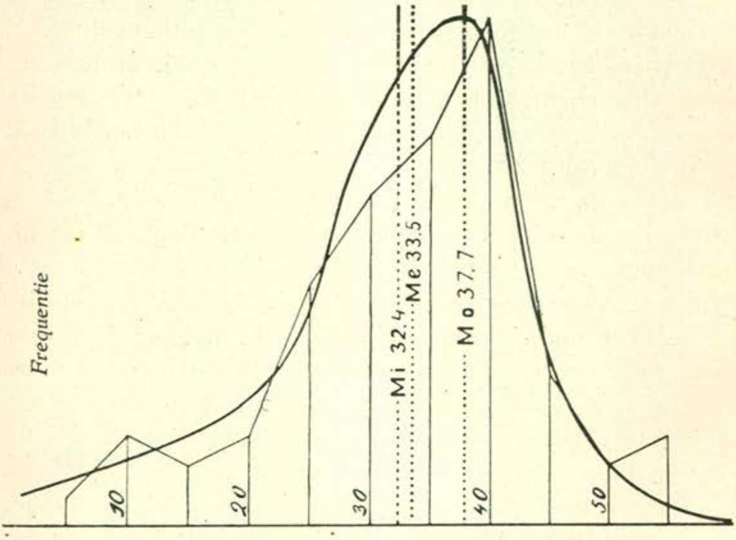
---

[1]) en [2]) *G. Udney Yule:* An Introduction to the Theory of Statistics. London 1922.

[3]) *Alfred Gysi:* Betrag zum Artikulationsproblem.

voorstellen in het vervolg de drie grootheden *modus, gemiddelde* en *mediaan* scherp te onderscheiden. Omtrent deze laatste deel ik hier slechts mee, dat dit die waarde is in een reeks, welke in die reeks evenveel waarden boven zich als beneden zich telt. Omtrent het nader verband tusschen deze drie moet ik verwijzen naar de speciale werken over statistiek enz.

Kom ik thans tot de conclusies uit het voorgaande, dan stel ik vast, dát gemiddelde en normaal, ook al is het eerste technisch juist berekend, niet identiek zijn en slechts in bijzondere



Helling der C. baan in graden.
fig. 5.

gevallen elkaar dekken. Voor het beoordeelen van reeksen metingen is dan ook de bloote mededeeling van het gemiddelde meestal waardeloos.

Deze reeksen zullen steeds moeten worden weergegeven in frequentie-tabellen, bij voorkeur vergezeld van frequentiekrommen. Ons begrip normaal zal zich moeten verbinden met een centrale waarde, welker frequentie maximaal is. Grafisch gezien zullen alle waarden, welke vallen binnen een ter weerszijde van deze centrale liggende strook als normaal moeten worden beschouwd. De breedte van deze strook dient in verband met het doel van het speciale normbegrip voor het object van onderzoek, voor ieder dergelijk object afzonderlijk bij onderlinge afspraak te worden vastgesteld. Zóó moet men dan ook Dreyfus lezen, als hij schrijft: „Le normal ne peut être défini. Le normal varie à l'infini. L'anormal est la limite du normal, l'anormal en plus (ou par excès) et en moins (ou par défaut); voilà, qui dètermine l'espace dans lequel tout peut être considéré comme normal." [1])

Voor men echter tot een dergelijke conventie in ortho- en prothodontie kan komen, zullen nog op uitgebreide schaal metingen moeten geschieden. Door deze metingen systematisch te verwerken zal men ten slotte kunnen komen tot een „beoordeelingsbasis". En pas dàn zal er van een volledige statica sprake kunnen zijn. Onze wetenschap staat in dezen nog een eindje vóór het begin. De orthodontisten polemiseeren over de ligging van het nulpunt. De prothodontisten zijn zóó ver nog niet.

(Wordt vervolgd).

---

1) *Sylvain Dreyfus:* Le Diagnostic en Orthodontie. 1922.