VOORDRACHTEN OVER DE THEORIE DER PROTHODONTIE

DOOR

B. R. BAKKER.

(Vervolg).

Kinematica.

Coördinaten; bewegingsvrijheid in het algemeen.

De kinematica omvat de studie der beweging. Zij houdt zich niet bezig met de krachten, die de beweging veroorzaken en evenmin met de massa van het bewegend object. Zij beschouwt slechts den vorm der bewegingsbaan en den tijd, waarin deze geheel of gedeeltelijk wordt doorloopen. Beweging kan dus worden gedefinieerd als verandering van stand met betrekking tot den tijd.

Om beweging te kunnen constateeren reeds, is het noodig opeenvolgende standen te kunnen vergelijken. Op de een of andere wijze moeten deze worden vastgelegd. Dit geschiedt door middel van een z.g.n. coördinatenstelsel. Nemen wij aan, dat een punt zich in een plat vlak beweegt. Het woord punt is hier gebezigd in wiskundigen zin. Streng genomen hebben wij weliswaar te maken met een volgens alle afmetingen oneindig klein lichaam, d. i. met een materieel punt, maar omdat de begrippen kracht en massa wegvallen mogen wij dit materieele punt door een mathematisch vervangen denken.

Wij kunnen het beoogde doel bereiken door het vaststellen van twee grootheden. Men denkt zich hiertoe twee in het vlak vastliggende, elkaar onder een willekeurigen hoek in O snijdende, rechte lijnen XX' en YY'. (fig. 6). Om den stand van het punt M te bepalen denkt men zich twee beweegbare echter steeds aan XX' en YY' evenwijdige lijnen; deze lijnen brengt men beide door M. Zij zullen XX' en YY' snijden in A en in B. De afstanden OA en OB bepalen dan den stand van het punt M in het vlak XOY. Deze afstanden noemt men de coördinaten van M en duidt hen gewoonlijk aan met de letters x en y Vallen zij aan de zijde van X' of Y' dan worden zij als negatief beschouwd en van een — teeken voorzien. De vaste lijn XX' en YY' noemt men de assen van het (coördinaten)stelsel. De hoek tusschen deze assen is willekeurig; gewoonlijk echter neemt men hem recht, omdat dit practische voordeelen biedt.

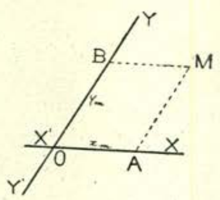

Fig. 6.

Het punt in het vlak, dat op een bepaald oogenblik dezelfde coördinaten heeft als het bewegende punt, noemt men de plaats van het bewegende punt in dat vlak. Alle plaatsen te zamen, die een bewegend punt achtereenvolgens inneemt, noemt men zijn bewegingsbaan, of kortweg zijn baan. Als alle punten dezer baan in een plat vlak liggen, is zij een rechte lijn of een vlakke kromme.

Een punt kan in een vlak een oneindig aantal plaatsen hebben en dus een oneindig aantal banen beschrijven; m.a.w. het kan op een oneindig aantal manieren een willekeurige plaats M, bepaald door de coördinaten x_m en y_m bereiken. (fig. 6) Deze plaats is echter stellig ook te bereiken, aangenomen, dat de beweging in O begint, door achtereenvolgens de lijnen OA en AM of OB en BM te volgen. Laat men de beweging niet in O beginnen, maar in een willekeurig punt N, dan geldt hetzelfde, als het bewegend punt de afstanden $x_m - x_n$ en $y_m - y_n$ aflegt met inachtneming van volgorde en richting. Deze afstanden kunnen ook „met een omweg" worden afgelegd, d. w. z. langs kromme banen; het resultaat blijft hetzelfde. Op welke wijze, en langs welke banen ook, een punt een willekeurige plaats in een plat vlak bereikt, om deze te bepalen zijn steeds twee grootheden noodig en steeds zal die plaats ook bereikt kunnen worden door combinatie van een beweging langs of evenwijdig aan de X as en een beweging langs of evenwijdig aan de Y as. Andere beweging is niet denkbaar. Dit drukt men uit in de formuleering: e e n p u n t h e e f t i n e e n p l a t v l a k t w e e b e w e g i n g s-v r ij h e d e n.

Beschouwen wij thans plaats en beweging in een plat vlak van een lijn MN. De plaats van M is bepaald door x_m y_m. Hiermee ligt N echter allerminst vast. Is M alleen bepaald, dan is van N slechts bekend, dat het moet liggen op een cirkel, die met M als middenpunt en MN als straal te trekken zou zijn.

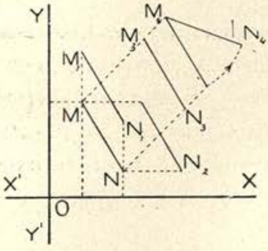

Fig. 7.

Slechts indien wij ook x_n en y_n kennen is de stand van MN bepaald. Welke andere standen kan MN in het platte vlak innemen? Natuurlijk een oneindig aantal. Men kan zich denken, dat M en N zich beide evenwijdig aan OY bewegen. Alle punten van MN beschrijven dan aan OY evenwijdige banen en MN bereikt de stand $M_1 N_1$. (fig. 7) Ook kunnen M en N zich evenwijdig aan de X as bewegen; M N bereikt de stand $M_2 N_2$. In de derde plaats is de stand $M_3 N_3$ bereikbaar, in welke $M_3 N_3$ eveneens evenwijdig is aan M N. Hiertoe bewoog M langs MM_3 en N langs NN_3 evenwijdig aan MM_3. Twee punten van MN bewogen zich langs // banen, dus was dit met alle punten van MN het geval. MN bewoog zich // aan zichzelf. Dit evenwijdig aan zichzelf bewegen noemt men verschuiving of *translatie*. De stand $M_3 N_3$ is echter ook te bereiken door samenstelling van twee translaties // aan de X as en aan de Y as. Zij stelt dus geen nieuwe bewegingsvrijheid voor, waarvan wij tot op heden twee tellen. Anders is dit echter met de stand $M_4 N_4$. Men kan zich voorstellen, dat deze bereikt werd, doordat MN nog een translatie onderging tot M de plaats M_4 bereikte en MN toen draaide om M_4 tot N in N_4 arriveerde. Deze stand $M_4 N_4$ is nooit te bereiken door combinatie van twee translaties; altijd is hier een andere bewegingssoort bij noodig, waarbij (in het platte vlak) alle punten van het bewegend object concentrische cirkelbogen beschrijven. Deze draaiïng noemt men gewoonlijk *rotatie*. Dit is dus de derde bewegingsmogelijkheid voor een lijn in het platte vlak.

Een vierde is evenwel niet denkbaar, dus op welke wijze, en langs welke banen ook, een lijn in een plat vlak een willekeurige stand bereikt, om deze te bepalen zijn steeds vier grootheden noodig en steeds zal die plaats ook bereikt kunnen worden door combinatie van twee translaties en een rotatie: e e n l ij n h e e f t i n e e n p l a t v l a k d r i e b e w e g i n g s v r ij h e d e n.

Men sta mij toe bij de beschouwing van een punt, dat zich in de ruimte beweegt, het vorig betoog vrijwel letterlijk te herhalen. De standbepaling kan men bereiken door het vaststellen van drie grootheden. Men denkt zich daartoe in de ruimte drie vaststaande vlakken, waarvan wij gemakshalve willen aannemen, dat zij elkaar volgens XX', YY' en ZZ' loodrecht snijden. (fig. 8). Om de stand van het punt M te bepalen denkt men zich verder drie beweegbare vlakken door M achtereenvolgens evenwijdig met XOZ, YOZ en XOY; deze

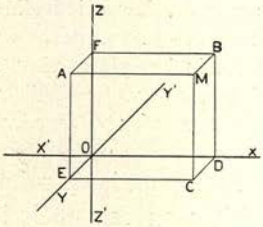

Fig. 8.

zullen de drie rechten YY', XX' en ZZ' snijden in de punten E, D en F. De afstanden OE, OD en OF bepalen dan den stand van het punt M.

Ook in de ruimte zijn dus bij dit stelsel de hoeken, waaronder lijnen en vlakken elkaar snijden recht. Men spreekt van een rechtlijnig, orthogonaal coördinatenstelsel. Andere systemen zijn eveneens zeer wel denkbaar en bestaan dan ook. Dit systeem biedt echter als regel de meeste voordeelen. Waar wij later bij experimenten door middel van fotografie, d. i. dus door projectie uit één centraal punt onze gegevens verkrijgen, zullen wij deze dan ook moeten omrekenen tot orthogonale projectie. De in de orthodontie onlangs door van Loon geopperde gedachte om te werken met twee YZ vlakken komt mij niet zeer gelukkig voor. Later komen wij hierop terug. Voorloopig volsta ik met de opmerking, dat het aanvaarden van twee / / coördinaatvlakken analytische behandeling van door meting gewonnen data zooal niet onmogelijk, dan toch noodeloos moeilijk maakt.

De stand van een punt in de ruimte kunnen wij dus op de straks geschetste wijze vaststellen. Het punt in een ruimtestelsel, dat op een gegeven oogenblik dezelfde coördinaten heeft als het bewegende punt, noemt men de plaats van dat punt in het ruimtestelsel. Alle plaatsen te zamen, die een bewegend punt achtereenvolgens inneemt, noemt men zijn bewegingsbaan. Liggen alle punten der baan in een plat vlak dan is deze een rechte lijn of een vlakke kromme; is dit niet het geval, dan is zij een meervoudig gebogen kromme, d. i. een ruimte-kromme.

Deze onderscheiding is de basis voor een indeeling der kinematica in studie van de beweging in een plat vlak en van beweging in de ruimte. Deze indeeling is nuttig en noodig niet alleen omdat de studie van de beweging in de ruimte veel moeilijker is dan die in het platte vlak, maar bovendien omdat niet alle betrekkingen en „wetten", die voor het laatste gelden zonder meer kunnen worden overgedragen op bewegingen in de ruimte.

Het is duidelijk, dat een punt in de ruimte eveneens oneindig veel plaatsen kan hebben en een oneindig aantal banen kan beschrijven, m. a. w. op een oneindig aantal manieren een willekeurige plaats M, bepaald door de coördinaten x_m, y_m en z_m kan bereiken. Deze plaats M zou echter, als wij aannemen, dat de beweging in het punt O begint, (fig. 8) ook bereikt zijn door achtereenvolgens de lijnen OE, EA en AM te volgen. In plaats van langs deze drie is een weg langs drie andere lijnen evengoed mogelijk, mits zij in lengte, richting en volgorde aan overeenkomstige eischen voldoen. Evenals bij het platte vlak kan de beweging in een willekeurig punt aanvangen en kunnen de afstanden langs een omweg worden afgelegd.

Op welke wijze en langs welke banen ook een punt een willekeurige plaats in een ruimtestelsel bereikt, om deze te bepalen zijn steeds drie grootheden noodig en steeds zal die plaats ook kunnen worden bereikt door combinatie van een beweging // aan de X-as, een beweging // aan de Y-as en een beweging // aan de Z-as; een punt heeft in de ruimte drie bewegingsvrijheden.

Beschouwt men de bewegingsvrijheid van een lijn in de ruimte, dan blijkt die ook hier grooter te zijn dan die van een punt. Eenvoudigheidshalve nemen wij als voorbeeld de lijn MN uit figuur 9, waarvan N samenvalt met O. Nemen wij verder aan, dat in den beginstand M in het vlak XOZ ligt, dan ligt dus de geheele lijn in dat vlak. Hoeveel bewegingsvrijheden heeft deze lijn? Omdat ik er bijzonder prijs op stel, dat deze voor sommigen zoo eenvoudige zaken door allen goed zullen worden begrepen, wil ik thans trachten een anderen weg in mijn redeneering te volgen.

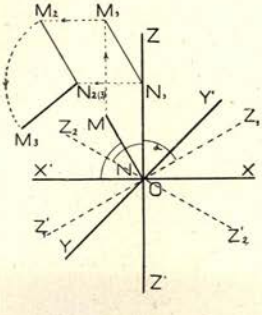

Fig. 9.

Men kan zich een beweging van MN voorstellen, waarbij N beweegt langs OX en M beweegt // OX, en MN derhalve evenwijdig aan zichzelf verschuift, een translatie ondergaat. Behalve deze zijn translaties mogelijk in de richting OY en in de richting OZ, waarmee drie vrijheden zijn aangegeven. Stel nu, dat wij de bewegingsmogelijkheden van N vernietigen, dus dit punt in O vastleggen. Dan zal toch niet de geheele lijn onbeweeglijk zijn geworden, zij zal nog kunnen draaien. Rotatie in het platte vlak geschiedt om een punt in dat vlak als centrum. Rotatie in de ruimte geschiedt om een lijn als as; alle punten van het roteerend object beschrijven in onderling evenwijdige platte vlakken een serie van cirkels, welker centra door een loodrecht op genoemd vlakken staande rechte lijn kunnen worden verbonden; deze lijn is de as der rotatie in de ruimte. Ligt N vast en zal dan MN draaien, dan zal dit moeten gebeuren om een lijn door N. Beschouwen wij als veronderstelde as allereerst de lijn MN zelf. In dit geval zou MN draaien om MN, dus van draaing overeenkomstig de definitie van dit begrip is geen sprake, er worden geen cirkels beschreven, alle punten van MN blijven in rust; MN zelf als as is een ongerijmdheid. In een ruimtestelsel met drie elkaar onderling loodrecht snijdende assen zijn nu nog twee lijnen onderling en beide loodrecht op MN denkbaar. MN ligt in het vlak XOZ; een dezer lijnen is dus de as YY', terwijl de tweede is de lijn loodrecht op een vlak door MN en YY', met N als voetpunt. Deze ligt in het vlak XOZ en is derhalve direct te teekenen: $Z_1 Z_1'$. Om deze beide assen zal MN nu nog kunnen draaien. Draait zij om YY' dan zal zij in het vlak XOZ een cirkelvlak beschrijven met OM als straal; dit is de vierde bewegingsvrijheid. Belet men deze rotatie, dan zal MN nog kunnen draaien om $Z_1 Z'_1$ en eveneens een cirkelvlak beschrijven met OM als straal. Dit vlak snijdt XOZ loodrecht en MN is de snijlijn. Dit is de vijfde bewegingsvrijheid. Andere bewegingsmogelijkheden dan deze vijf en combinaties van deze vijf bestaan niet voor een lijn. Op welke wijze en langs welke banen ook, een lijn een willekeurigen stand in een ruimtestelsel bereikt, om deze te bepalen zijn steeds zes grootheden noodig en steeds zal die stand ook bereikt kunnen worden door een combinatie van drie trans laties en twee rotaties, m. a. w. e e n l ij n h e e f t i n d e r u i m t e v ij f b e w e g i n g s v r ij h e d e n.

Misschien gelooft men dit nu wel. Zij, die zich voor bewegingsvraagstukken interesseeren, zullen echter nog wel een enkel geval op een andere wijze willen bezien.

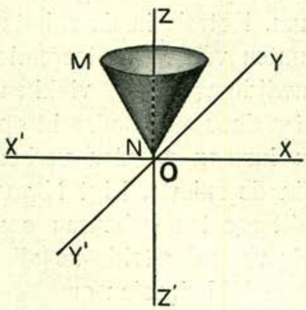

Fig. 10.

MN, oorspronkelijk in den zelfden stand als straks, draait om de as ZZ' en beschrijft een kegelmantel; (fig. 10). Is dit nu een bewegingsmogelijkheid, welke in onze analyse nog niet voorkomt? Om in te doen zien, dat deze rotatie een combinatie is van reeds besproken mogelijkheden, diene de volgende redeneering.

In figuur 9 namen wij als rotatie assen aan de lijn MN en de beide hierop loodrecht staande assen YY' en Z_1Z_1', waarvan de eerste loodrecht staat op het vlak XOZ en de laatste in dit vlak ligt. Men denke zich nu MN met Z_1Z_1' hieraan vast verbonden draaiend in het vlak XOZ tot Z_1Z_1' en ZZ' samenvallen, dan zal MN samenvallen met X'O. Indien ZZ' aan de draaiende figuur ook vast verbonden was geweest, zou deze thans de stand Z_2Z_2' innemen; m.a.w. indien wij ook nog XX' vastverbonden denken, zullen wij het geheele ruimtestelsel over een hoek (alpha) om de as YY' hebben doen draaien. In de figuur 9, waarin de nieuwe stand van XX' om niet te veel lijnen te krijgen niet is geteekend, hebben wij dus voor ons twee assenstelsels, waarvan men beurtelings het eene stelsel als hoofdassen en het andere als hulpassen kan beschouwen.

De bewegingsvrijheden van een vlakke figuur in een plat vlak behoeft, naar ik veronderstel niet afzonderlijk te worden gedemonstreerd, zij zijn dezelfde als die van een lijn, te weten twee translaties en een rotatie.

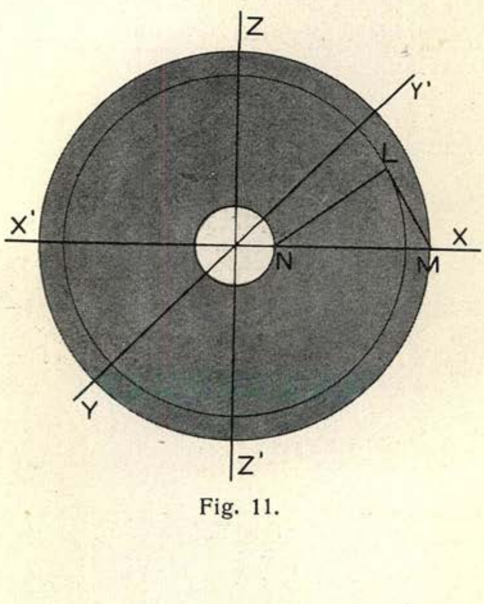

Fig. 11.

Misschien ten overvloede wil ik echter toch de beweging van een vlakke figuur in de ruimte bespreken. Ter illustratie diene de driehoek LMN uit figuur 11. Eenvoudigheidshalve laten wij een zijde van dien driehoek samenvallen met een der ruimte-assen, met XX', terwijl L in het vlak XOZ ligt. (Het nulpunt O is in de figuur niet met een letter aangegeven.) LMN zal in de eerste plaats twee translaties uit kunnen voeren in het vlak XOZ; schuift zij langs de X-as, dan ontstaat een vlakke strook ter breedte van de driehoekshoogte; beweegt zij zich // ZZ', dan ontstaat een strook ter breedte van de basis van de driehoek. Vervolgens zal zij een translatie kunnen uitvoeren // YY', waarbij een prisma ontstaat met LMN als doorsnede. Bovendien is mogelijk een rotatie om YY', dus in het vlak XOZ. Er ontstaat dan de in fig. 11 geteekende schijf. Belet men deze vier bewegingen, dan kan LMN nog roteeren om XX'; er ontstaat een dubbele kegel, (fig. 12). Terwijl eindelijk nog een rotatie mogelijk blijkt om ZZ' en het in fig. 13 geteekende lichaam ontstaat. In het totaal kent de vlakke figuur in de ruimte dus zes bewegingsvrijheden en is om den stand van een vlak in de ruimte te bepalen de kennis van negen grootheden noodzakelijk.

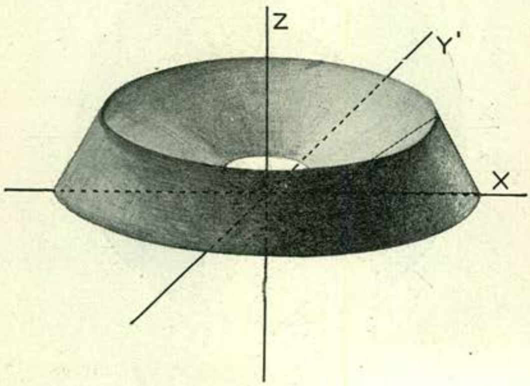

Fig. 12.

De bewegingsmogelijkheid eindelijk van een lichaam tracht ik te demonstreeren met fig. 14. Deze stelt een bol in de ruimte

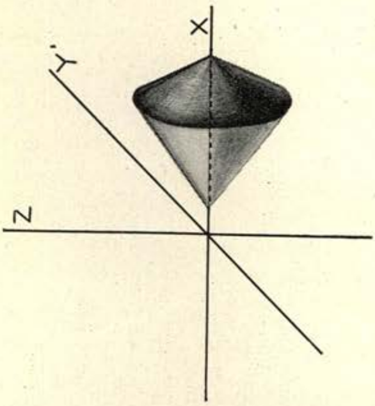

Fig. 13.

voor. Het middenpunt van de bol valt samen met het nulpunt van het ruimtestelsel. Men kan dus de drie assen van de bol ook laten samenvallen met de drie ruimteassen. De bewegingsmogelijkheden zijn de volgende:

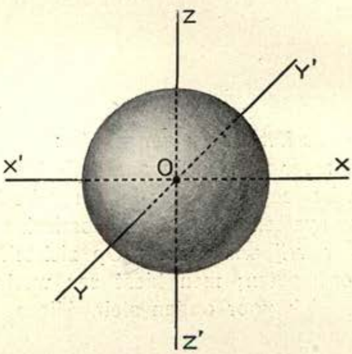

Fig. 14.

1. Het middenpunt van de bol beweegt langs YY' en alle andere punten van de bol bewegen // aan YY'.

2. Het middenpunt van de bol beweegt langs XX' en alle andere punten bewegen // aan XX'.

3. Het middenpunt beweegt langs ZZ' en alle andere punten bewegen // aan ZZ'.

Hiermee zijn dus drie translaties aangegeven.

4. Het middenpunt blijft in O, alle andere punten draaien om YY'.

5. Het middenpunt blijft in O en alle andere punten draaien om XX'.

6. Het middenpunt blijft in O en alle andere punten draaien om ZZ'.

Hiermee zijn de drie rotaties aangegeven.

Ook hier is het echter volstrekt onnoodig dat in den beginstand het middenpunt van de bol samenvalt met het nulpunt O. Hij werd slechts ter wille van een eenvoudige voorstellingswijze aldus gekozen. Van welken stand men ook uitgaat en welke andere beweging men ook onderzoekt, steeds zal het mogelijk blijken haar terug te voeren tot een combinatie der zes beschrevene, met andere woorden: e e n l i c h a a m h e e f t i n d e r u i m t e z e s b e w e g i n g s v r ij h e d e n en om den stand van een lichaam in de ruimte te bepalen is de kennis van n e g e n grootheden noodzakelijk.

Zooals bekend is werkt men in de orthodontie soms met zeven bewegingsmogelijkheden. (Angle). Deze schijnbare tegenstrijdigheid met wat zooeven werd ontwikkeld heeft dezelfde bestaansoorzaak als het straks genoemde boventallige coördinaatvlak, n.l. een meer denken in anatomische dan in wiskundige richting. Men beweegt zich dus in een geheel andere sfeer. Dit zevenvrijheden systeem is zuiver anatomisch en het aantal zeven wordt hierdoor vrij willekeurig. Op zichzelf behoeft dit geen bezwaar te ontmoeten; men kiest een werkmethode naar het doel, dat men zich voor oogen stelt. Alleen dient natuurlijk te worden gewaakt tegen een vermenging van een anatomisch en een wiskundig systeem.

Tot zoover over bewegingsvrijheden van vrij in de ruimte bewegende objecten. Op het terrein der prothese-leer ontmoeten wij echter geen los ronddwarrelende kaken. Wij hebben steeds te maken met twee lichamen, die elkaar in een of in meerdere punten raken en met elkaar in contact blijven. We zullen thans hebben te onderzoeken hoe het staat met de bewegingsvrijheid van dergelijke lichamen.

(Wordt vervolgd.)