

## VOORDRACHTEN OVER DE THEORIE DER PROTHODONTIE

DOOR

B. R. BAKKER.

---

(Vervolg)

Op welke wijze dan zullen wij, beter dan door het experiment, een inzicht krijgen in den aard der kaakbewegingen? Mij dunkt door ook thans nog voorloopig de zuiver mathematische kant te belichten en de overigens zeer interessante anatomische en physiologische détail-kwesties tot later te laten rusten. Aldus gezien is voor ons de onderkaak een lichaam, dat zich in de ruimte kan bewegen en dat dus maximaal hiertoe zes vrijheden bezit. Wij zullen deze ruimtebeweging dienen te betrekken op drie coördinaatvlakken. *Hoe* die vlakken de ruimte verdeelen, dus onder welken hoek zij elkaar snijden en wáár wij hen geplaatst denken is van geen invloed op de nauwkeurigheid, waarmee wij de beweging met hun hulp registreeren. Een heel eenvoudig voorbeeld maakt dit duidelijk. Stel, dat een auto zich beweegt tusschen Utrecht en Arnhem en dat wij willen vaststellen hoeveel K.M. deze in vijf minuten aflegt. Men kan nu de afstand gaan meten van Utrecht tot de plaats, waar de auto zich op een gegeven oogenblik bevond en dan de afstand meten van Utrecht tot het punt, dat zij vijf minuten later passeerde. Als men de noodige nauwgezetheid betracht, krijgt men aldus, met Utrecht als nulpunt, zeker het ge-

wenschte resultaat door een zeer eenvoudige berekening aan de metingen toe te voegen. Maar het zou wel eens gemakkelijker en practischer kunnen zijn de respectievelijke afstanden te meten vanaf Wageningen of vanaf Driebergen en dus het nul-punt in een dier plaatsen aan te nemen. Dit hangt er geheel van af op welk stukje van den langen weg tusschen Utrecht en Arnhem de auto zich tijdens de bedoelde vijf minuten bevindt. Terwijl het ten slotte natuurlijk *in dit geval* en ter beantwoording *van deze vraag* nog gemakkelijker en doeltreffender is de afstand te meten tusschen de beide aangegeven punten zelf en het eerste als nulpunt te kiezen. Kortom elk vast punt, elke kilometerpaal, waarvan men met redelijkheid toch mag aannemen, dat hij gedurende de auto-tocht op zijn plaats zal blijven, kan voor ons doel dienen. Algemeener maar nauwkeuriger tevens uitgedrukt: de mogelijke plaatsverandering der meetpunten gedurende het onderzoek moet ten opzichte van het te meten traject oneindig klein zijn.

Bij het kiezen van de plaats onzer nulpunten, lijn- of vlak-coördinaten worden wij dus uitsluitend geleid door overwegingen omtrent doelmatigheid. De overwegingen van *A.* kunnen hem tot deze, die van *B.* hem tot die conclusie brengen, zonder dat men in hunne uiteenlopende meeningen een ernstig geschil in wetenschappelijken zin behoeft te zoeken. Wij trachten derhalve een stel coördinaatvlakken te kiezen, die voor ons vraagstuk in deze instantie het doelmatigst schijnen. Vooraf echter gaan we het bewegend lichaam zelf van anatomisch object omzetten in een mathematisch lichaam. Nemen wij aan, dat wij een volkomen symmetrische onderkaak tot onze beschikking hebben. Deze plaatsen wij zoodanig in de ruimte, dat het voorste punt van den Bonwill-driehoek en de beide hoogste punten van de distobuccale kauwknobbels der tweede molaren in een horizontaal vlak liggen. Dit vlak zou ons als horizontaal coördinaatvlak kunnen dienen. Als een der verticale vlakken ware nu het mediaanvlak dezer symmetrische onderkaak te

gebruiken, terwijl het tweede verticale vlak b.v. de condyli distaal zou kunnen raken. Brengt men dit systeem echter in tekening en bovenal bezigt men dit systeem om bewegingsconstructies weer te geven, dan loopen de lijnen der verschillende projecties door elkaar en wordt aan duidelijkheid ingeboet. Dáárom verschuiven wij elk dezer drie vlakken evenwijdig aan zichzelf zoo ver, dat de kaak zich binnen een drievlakkenhoek bevindt en bij de bewegingen, welke wij hebben na te gaan hier binnen blijft. Wij verbinden thans de punten van den Bonwill-driehoek, verbinden deze met de molaarpunten, en verbinden deze laatsten onderling. In perspectief gezien ontstaat dan het in fig. 46 weergegeven skelet.

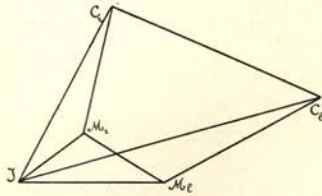


Fig. 46.

Deze constructie zij het lichaam, welks bewegingen wij zullen analyseeren. De orthogonale projecties worden dan dus als in fig. 47 is weergegeven.

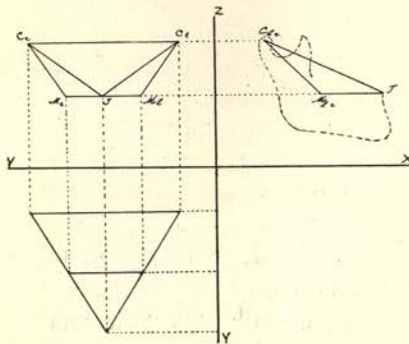


Fig. 47.

In deze teekening vindt men de 2de molaar niet precies op de plaats, welke hij anatomisch in neemt. Opzettelijk hebben wij hem iets naar linguaal verschoven om een eenvoudige figuur te krijgen, wat bij constructies een gemak oplevert. Bij het overbrengen van langs wiskundigen weg verkregen resultaten naar het terrein der anatomie zullen we natuurlijk te zijner tijd rekening moeten houden. Dan zullen we ons hebben te herinneren, dat deze figuur een kunstproduct is, welke een kaak moet vóórstellen, meer niet.

Zoals gezegd bezit dit lichaam maximaal zes bewegingsvrijheden. Denkbaar zijn verschuivingen in de drie assenrichtingen en rotaties om assen loodrecht op de coördinaatvlakken. Bovendien natuurlijk combinaties van deze bewegingen, maar hiertoe wordt van niet meer dan de bestaande zes vrijheden gebruik gemaakt. Thans is het zaak na te gaan welke van deze zes vrijheden, afzonderlijk of in combinatie, inderdaad worden gebruikt, bij welke bewegingen zij worden gebezigd. Wij beginnen hiertoe met de eenvoudigste.

Zonder twijfel zijn dit in de eerste plaats de bewegingen, welke in een plat vak gebeuren. De orthale en de propaline bewegingen nu zullen door de onderkaak zooals wij ze reconstrueerden in aan het Y Z-vlak evenwijdige serie van vlakken kunnen worden uitgevoerd. M. a. w. alle punten van het lichaam, welke in lijnen loodrecht op het Y Z-vlak liggen, zullen congruente banen beschrijven, die in het Y Z-vlak één gemeenschappelijke projectie vinden. In plaats van de ruimtebeweging van de onderkaak, is het ons dus geoorloofd de beweging der projectie hiervan in het Y Z-vlak te beschouwen.

Voor het kennen der beweging van een figuur in een plat vlak is het voldoende de beweging van twee punten dier figuur te kennen. Welke punten dit zijn is geheel onverschillig. Van ons systeem kiezen wij de punten *C* en *I*, omdat van deze punten uit de litteratuur en door eenvoudige experimenten ons de banen *bij benadering* bekend zijn. Wij weten b.v. dat bij de voorbeet-beweging *C* zich naar voren en naar beneden beweegt en *I*, glijdend langs den lingualen kant van

den bovenincisvus een soortgelijke baan beschrijft. Vrij ruw genomen, z.g.n. bij *eerste* benadering, kunnen wij dus zeggen, dat bij de propaline beweging *C* en *I* zich bewegen in een richting, die de resultante is eener combinatie der richtingen  $-Z$  en  $+Y$ , bij het naar voren brengen, of van  $+Z$  en  $-Y$  bij het terugtrekken naar den ruststand. Evenwel, wij weten, dat deze eerste benadering van de werkelijkheid in vele gevallen inderdaad vrij sterk zal afwijken. De banen zoowel door *C* als door *I* afgelegd, zullen dikwijls, meestentijds zelfs, niet recht maar gebogen zijn.

Wij komen dan iets dichter bij de waarheid, door bij *tweede* benadering deze banen te vervangen door stukken van zoo goed mogelijk passende *cirkelbogen*, hen aldus omzettende tot krommen met bekenden straal en middenpunt. De *C*-baan zal dan echter ten opzichte van de *X*-as concaaf of convex kunnen zijn.

Het eerste geval doet zich misschien voor als de condylus in ruststand diep in de fossa mandibularis ligt en bij voorbeet de *C*-baan mede bepaald wordt door het gedeelte *a b* van fig. 48. De tweede mogelijkheid is een beweging van *C*

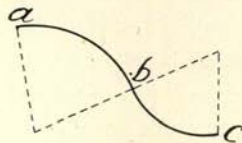


Fig. 48.

ongeveer overeenstemmend met het profiel *b c*. Zeker is het, ook afgezien van eenige verklaring, dat beide vormen voorkomen. Dergelijke mogelijkheden bestaan voor de *I*-baan eveneens.

Bij een diepe beet is hier de baan *d e* denkbaar; in andere gevallen de baan *e f* van fig. 49.

Gaat men nog een stap verder, dan zal men bij *derde* benadering ook de éénmaal gebogen kromme niet meer voldoende achten.

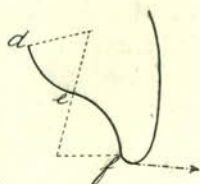


Fig. 49.

Bekend is inmers, dat de condylus dikwijls een  $\infty$  vormige baan beschrijft. Dit zal dus het geval zijn als hij zich van *a* naar *c* beweegt, of althans een traject beschrijft ter weerszijde van het buigpunt *b*. Analoog hiermee kan *I*, glijdend langs het geheele linguale vlak van den bovenincisivus, een baan afleggen, welke den vorm van een omgekeerde  $\infty$  vertoont, derhalve zoo:  $\infty$ . Terwijl ten slotte de *I*-baan weer den  $\infty$  vorm kan benaderen als bij sterker naar voren geschoven kaak *I* vanaf *e* verder glijdt dan *f*, ongeveer de stippellijn in fig. 49 volgend. (Deze lijn is dan niet meer een beweging-bepalend element, maar kan integendeel slechts ontstaan doordat in de molaar- en praemolaarstreek de geleiding der beweging of blijft bestaan of wordt overgenomen.) De omgekeerde  $\infty$  vormige baan voor de *C* is mij niet bekend en acht ik zóó onwaarschijnlijk, dat ze niet in onze beschouwingen zal worden opgenomen.

In het geheel zijn er aldus 20 combinaties denkbaar, die voorloopig voor ons ieder een bewegingstype zullen vertegenwoordigen. In bijgaande tabel zijn zij schematisch aangegeven.

De beteekenis van deze wijze van onderzoek nu ligt voornamelijk in drie momenten.

In de eerste plaats kan ieder der typen grafisch met zeer groote nauwkeurigheid worden behandeld. Immers het construeeren der halveerende loodlijnen biedt thans niet meer het minste bezwaar. Waar de bewegingsbaan een rechte is, kan deze worden verlengd en eerst één normale worden geconstrueerd. Alle anderen zullen een bundel hieraan even-

## Propaline bewegingstypen der onderkaak.

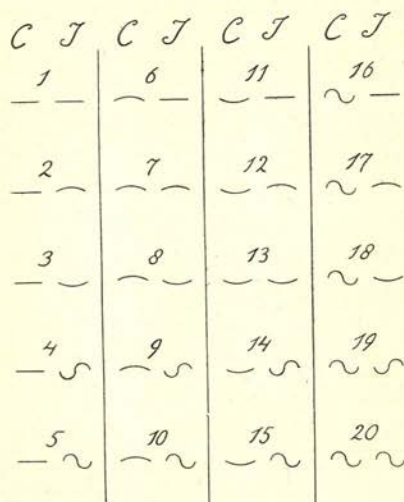


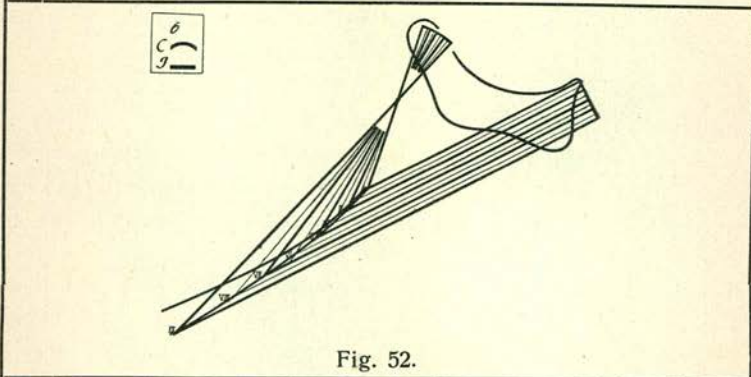
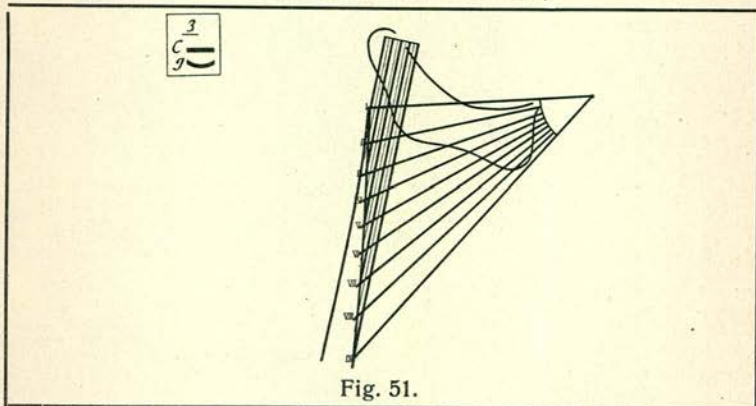
Fig. 50.

wijdige lijnen vormen. Zijn de bewegingsbanen cirkelbogen, of combinaties van cirkelbogen dan zullen de normalen door de middelpunten kunnen worden getrokken. De analytische behandeling wordt eveneens veel eenvoudiger; uit haren aard is zij echter meestentijds minder overzichtelijk dan de grafische; daarom bepalen wij ons tot de laatste.

Vervolgens zal men elk experimenteel gevonden stel banen steeds als een der typen kunnen beschouwen en als zoodanig analyseeren. Natuurlijk slechts bij benadering, dus slechts met een betrekkelijke graad van nauwkeurigheid. Maar de vraag is of een grootere, individueele, graad van nauwkeurigheid inderdaad noodig is en wel opweegt tegen de in onze laatste voordracht geschetste nadeelen. Het verkrijgen der experimenteele gegevens, was relatief eenvoudig, het analytisch of grafisch vaststellen van roulette en basis bleek ons echter vrijwel onuitvoerbaar. En juist om dezen is het ons te doen, omdat zij de aard der beweging ons zoo duidelijk voor oogen voeren.

In de derde plaats heeft onze methode van werken het voordeel van in deze typen alle bewegingen terug te brengen tot in de kinematica bekende gevallen. Bij het nader uitwerken van enkele voorbeelden zal dit blijken.

Om deze redenen dus wordt òf een stel experimenteel verkregen bewegingsbanen behandeld, met inachtnemen der plaats van het kromtemiddelpunt en lengte der kromtestraal, alsof zij met een der twintig typen identiek zijn, òf reeds à priori onderzoekt men de geabstraheerde bewegingstypen zelf om de invloed der onderlinge variaties kunnen nagaan. Ter illustratie en met het doel ze later te bespreken geven wij hier de afbeeldingen van een viertal hunner. In deze gevallen werden poolbaan en poolkromme uit de snijpunten der normalen geconstrueerd. (Fig. 51, 52, 53 en 54.)





7
C
J

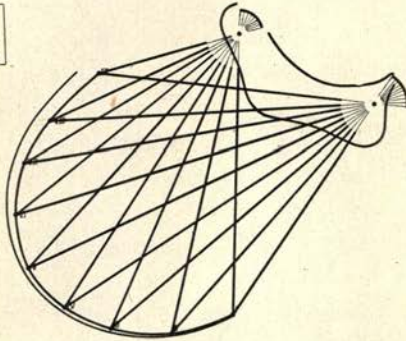


Fig. 53.

13
C
J

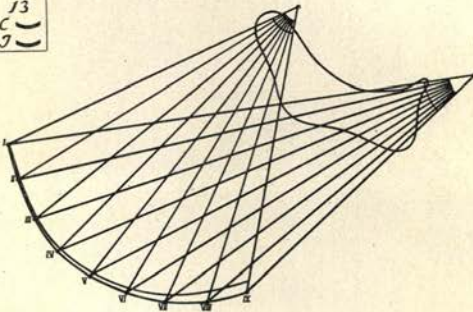
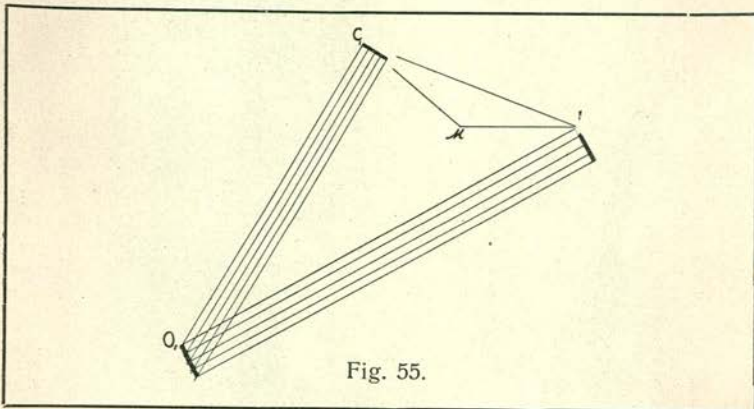


Fig. 54.

Wij willen thans beginnen met althans één der typen vrij volledig te behandelen. Uit den aard der zaak kiezen we hiertoe no. 1, de eerste benadering, waarbij  $C$  en  $I$  worden verondersteld zich op rechte lijnen te bewegen. Liggen toevallig deze banen in elkaars verlengde of loopen zij evenwijdig dan hebben wij te doen met een eenvoudige translatie. Dit speciale geval ter zijde stellend blijft dus, dat de rechte lijnen elkaar in het verlengde zullen snijden.

Om de poolbaan te construeeren kan men nu de  $C$ -baan in een doelmatig aantal stukjes verdeelen en dus een aantal standen fixeeren, welke  $C$  tijdens de beweging zeker zal innemen. Hiermee is een gelijk aantal corresponderende standen van  $I$  vastgelegd omdat de afstand  $C I$  constant is. In de desbetreffende punten kunnen derhalve de bijeen horende normalen worden opgericht in door hunne snijpunten de poolbaan worden getrokken.

In fig. 55 vindt men dit procédé weergegeven. Duidelijkheidshalve zijn hier slechts vijf standen aangegeven en is de driehoek  $C I M$  slechts in den beginstand geteekend. De poolbaan (basis) is *schijnbaar* eveneens een recht lijntje. De roulette kan men vinden op de in een vorig hoofdstuk aangegeven wijze. Zij is weggelaten omdat zij op deze schaal en in deze teekening een onvoldoend beeld zou geven. Dit is de constructie zonder meer.



Zij laat echter vragen onbeantwoord. Zoo interesseert ons b.v. een exacter bepaling van den vorm der poolbaan en poolkromme; zoo zou het niet onbelangrijk zijn te weten welke banen de andere punten van het systeem beschrijven.

Nu moet het derde voordeel dezer methode dus aan het licht komen. Het „geval” moet verder als een mathematisch vraagstuk kunnen worden behandeld. Aldus:

Gegeven: 2 elkaar snijdende rechte lijnen  $O X$  en  $O Y$ . Een rechte lijn  $C I$  beweegt zich met  $C$  langs  $O X$  en met  $I$  langs  $O Y$ .

Gevraagd: de poolbaan en de poolkromme der beweging, en de baan van een met  $C I$  verbonden punt  $M$ .

Voor de oplossing brengen wij even een stelling uit de planimetrie in herinnering. Zij in fig. 56  $A B$  de basis van een driehoek  $A B C$ . Als men door  $A$ ,  $B$ , en  $C$  een cirkel brengt dan zullen van alle driehoeken met de basis  $A B$  en de top op den cirkelomtrek, de tophoeken even groot zijn. Dus  $\angle A C B = \angle A C_1 B$ .

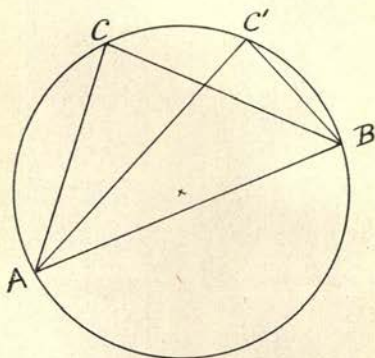


Fig. 56.

Men kan dit anders formuleeren door te zeggen: als van twee driehoeken een zijde en de hoek tegenover die zijde even groot zijn, dan zijn de omschreven cirkels gelijk.

Brengen we dit over naar fig. 57.

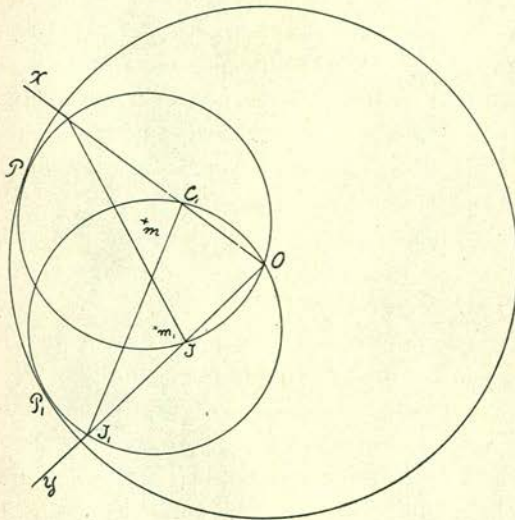


Fig. 57.

Hierin is  $CI$  de bewegende lijn.  $C$  schuift langs  $OX$  en  $I$  langs  $OY$ . In de driehoeken  $COI$  en  $C_1OI_1$  is dus  $CI = C_1I_1$  en  $\angle COI = \angle C_1OI_1$ . Dus zijn de cirkels  $(m)$  en  $(m_1)$  gelijk en is  $OP = OP_1$ . Men kan derhalve de cirkel  $(O)$  trekken, die alle cirkels  $(m)$   $(m_1)$   $(m_2 \dots n)$  omsluit. Denk nu  $CI$  vast verbonden aan den cirkel  $(m)$  dan zal als  $C$  langs  $OX$  en  $I$  langs  $OY$  glijdt  $(m)$  rollen in  $(O)$ . Maar ook omgekeerd: als  $(m)$  rolt in  $(O)$  dan zal  $C$  schuiven langs  $OX$  en  $I$  langs  $OY$ , voor welke beweging dus  $(m)$  de roulette en  $(O)$  de basis is.<sup>1)</sup>

Uit de figuur en uit het gegeven blijkt verder, dat de grootte van den cirkel  $(m)$ , getrokken door  $C$ ,  $I$  en het snijpunt  $O$ , bepaald wordt door de lengte van  $CI$  en door den hoek waaronder  $OX$  en  $OY$  elkaar snijden, terwijl de middenlijn van

<sup>1)</sup> Van de ontdekking der hoofdeigenschappen dezer cirkels komt de prioriteit toe aan Hieronymus Geronimo Cardano (1501-1576) achtereenvolgens hoogleraar in de wiskunde en in de medicijnen te Milaan, Pavia en Bologna.

( $O$ ) twee maal zoo groot is als die van ( $m$ ). Door deze twee elementen zijn derhalve de vormen van poolbaan en poolkrommen gedefinieerd. Overzichtelijker geven wij de geheele beweging weer in fig. 58.

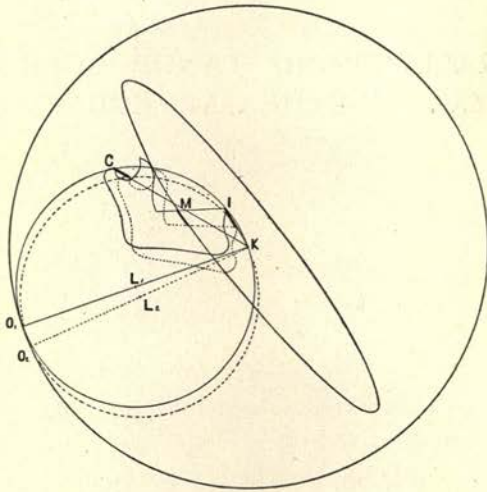


Fig. 58.

De gecompleteerde baan van  $M$  is in deze figuur reeds geteekend. Voor haar is gemakkelijk de vergelijking af te leiden  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; zij is derhalve een elips. <sup>1)</sup> Uit de figuur blijkt verder dat alle punten aan den omtrek van ( $L$ ) zich bewegen op de middenlijnen van ( $K$ ); en dat het punt  $L$  een cirkel beschrijft om  $K$ .

Afgezien nu van verdere bijzonderheden resulteert voor ons onder meer deze conclusie:

*Van een onderkaak met het bewegingstype 1, beschrijven alle kauwknobbels gedeelten van elipsvormige banen.*

(Wordt vervolgd.)

<sup>1)</sup> In de collegezaal werd dit stukje analytische meetkunde behandeld. De belangstellende lezer zal zoo noodig in een desbetreffend leerboek zijn weg wel vinden.