SPELEN MET KANSEN

A. H. B. Schuurs, tandarts*)
H. J. Duivenvoorden, psycholoog**)

Uit de *) vakgroep Cariologie en Endodontologie van het Academisch Centrum Tandheelkunde Amsterdam en **) de vakgroep Medische Psychologie en Psychotherapie van de Erasmusuniversiteit te Rotterdam.

SAMENVATTING
In het dagelijkse leven neemt men afhankelijk van de kansen op succes/mislukking risico's. Die kansen zijn soms simpel te berekenen, soms ook moeilijker te bepalen. Dat laatste geldt voor voorwaardelijke kansen. Ook in de tandheelkunde spelen de kansen op succes/mislukking een rol. Zo hangt bij de keuze tussen endodontisch behandelen en extraheren de beslissing mede af van de kans dat de endodontische behandeling zal slagen; obliteratie, parodontitis apicalis en andere complicaties beïnvloeden deze slaagkans negatief. Met gebruikmaking van onderzoeksgegevens kan voor elke complicatie berekend worden met hoeveel procent de slaagkans afneemt. In deze bijdrage worden aan de hand van fictieve voorbeelden de grondslagen voor het verrekenen van zulke 'condities' beschreven.

SCHUURS AHB, DUIVENVOORDEN HJ. Spelen met kansen. Ned Tijdschr Tandheelkd 1989; 96: 53-6.

Trefwoorden: Statistiek – Bayesiaanse statistiek

Datum van acceptatie: 12 oktober 1988.

Adres: Dr. A. H. B. Schuurs, Louwesweg 1, 1066 EA Amsterdam.

1. INLEIDING

Mede voor een beter inzicht in het artikel 'Besliskunde. Caries behandelen? Röntgenfoto's maken?' (elders in deze aflevering), is het volgens de redactie zinvol een beschouwing over besliskunde en kansberekening te presenteren. Ter introductie wordt eerst een praktisch probleem uit de geneeskunde aangehaald. Vervolgens wordt aan de hand van een voorbeeld het belang van kansberekening voor de tandheelkunde aanschouwelijk gemaakt, waarna met voorbeelden aandacht wordt geschonken aan het berekenen van kansen en voorwaardelijke kansen. Tot slot wordt de Bayesiaanse statistiek op eenvoudige wijze verduidelijkt.

2. EEN VOORBEELD UIT DE GENEESKUNDE

Het onderzoek naar het vóórkomen en naar de determinanten van ziekten onder de bevolking is ook voor een individuele patiënt van belang. Het volgende voorbeeld, ontleend aan een inaugurale rede,[1] moge dit illustreren.

Een 50-jarige patiënt meldde zich bij de huisarts met vage klachten over een gevoel van kramp vóór in de borstkas. Onder andere vanwege het dan weer wel, dan weer niet optreden van deze klacht na inspanning, was de huisarts niet overtuigd van de diagnose 'angina pectoris', een ziekte die onder andere veroorzaakt wordt door kransvatenvernauwing. Desalniettemin besloot de huisarts Nitrobaat® voor te schrijven, mede vanwege diagnostische reden: immers, als het medicijn helpt, dan draagt dat bij aan de diagnose. De huisarts zond de patiënt na een tweede bezoek door naar een cardioloog, omdat hij geen zekere diagnose kon stellen. Bovendien veroorzaakte het tabletje onder de tong hoofdpijn.

Gebaseerd op gegevens uit epidemiologisch onderzoek wist de cardioloog op voorhand dat angina pectoris bij 60% van mannen van deze leeftijd met dit type klachten voorkomt. Om meer zekerheid te krijgen over de juistheid van de diagnose, liet hij de patiënt een inspanningsproef doen (fietsen), die geen van normaal afwijkende uitslag opleverde. Rekening houdend met het feit dat 30% van kransvatlijders bij de inspanningsproef 'normaal' reageren (vals-negatieven) en met het feit dat 15% van gezonde mannen na de inspanningsproef wel een afwijking toont (valspositieven), kwam de cardioloog tot de conclusie dat deze patiënt geen 60% kans heeft te lijden aan een kransvatvernauwing, maar slechts 35%.

Gezien deze lagere kans en gelet op de risico's en nadelen van hartcatheterisatie en chirurgisch ingrijpen, alsmede rekening houdend met de resultaten van de inspanningsproef, besloot de cardioloog te volstaan met medicamenteuze behandeling van de klachten. Kortom, doorslaggevend voor de diagnose en de in te stellen therapie waren gegevens uit epidemiologisch onderzoek gecombineerd met de individuele.

In het bovenstaande voorbeeld is het van belang te weten hoe de cardioloog de kans op kransvatlijden van 60% terug kon brengen tot 35%. Het antwoord ligt voor de hand: op grond van een nieuw gegeven, verkregen via de inspanningsproef, werd een oorspronkelijke kans (60%) herzien (35%). De wijze van berekenen wordt in het volgende toegelicht.

3. BELANG VOOR DE TANDHEELKUNDE

In de tandheelkunde werd en wordt incidenteel gebruik gemaakt van kans herzieningen.[2,3] Het belang ervan is duidelijk als bij voorbeeld gekeken wordt naar de kansen op succes of mislukken van endodontische behandelingen. Uit ongeveer 30 retrospectieve onderzoeken is bekend dat het percentage geslaagde kanaalbehandelingen varieert tussen 50% en 95%. Het succespercentage wordt beïnvloed door onder meer de criteria die worden aangelegd voor slagen/mislukken, voorts door de bekwaamheid van de uitvoerders (studenten, tandartsen, endodontisten) en, niet in het minst, door de toestand waarin de te behandelen elementen verkeerden.[3]

Wat de toestand van de pulpa betreft, een endodontische behandeling van een nog vitale pulpa van de 11 heeft meer kans van slagen dan die van een necrotische 16, al was het maar doordat de dode inhoud van de veelal bochtige kanalen van de 16 lastig te verwijderen is en het lekvrij vullen hoge eisen stelt, of doordat een vierde kanaal domweg over het hoofd kan worden gezien. Komt bovendien aan de 16 ook nog parodontitis apicalis voor, dan blijkt de kans op succes nog verder af te nemen.

Uitgaande van een normaal succespercentage van 90%, werd rekening houdend met de in de vorige alinea aangeduide complicaties, vastgesteld dat onder bijzondere omstandigheden, zoals de aanwezigheid van periapicale radiolucenties, slechts 53% van de endodontische behandelingen met succes wordt bekroond.[2]

Kennis over succespercentages voor verschillende omstandigheden is van belang voor individuele tandheelkundige patiënten. Waar de patiënt behoort te beslissen over het wel of niet laten uitvoeren van een endodontische behandeling, zullen sommigen niet bereid zijn deze te laten uitvoeren bij een voorspelde, grote kans op mislukking, maar wel als die kans naar verwachting klein is.

4. KANSBEREKENINGEN[4]

De normaal gebruikte kansberekeningen bij kansspelen zijn welbekend en worden vaak gebruikt. Bij de bepaling van de inzet speelt de kans op winst een rol – en omgekeerd. Velen zijn bereid tien gulden in te zetten bij een kans op winst van 1 op 6, maar slechts een enkeling wil Russische Roulette spelen, waarbij de kans op levens-

Tabel I. Aantallen elementen onderverdeeld naar het kenmerk 'type element'.

	Kenmerk 'type element'		
	incisieven	molaren	Rij totaal el.
Kolom totaal	66	934	N = 1.000

verlies ook 1 op 6 is, al zou daarmee een miljoen kunnen worden gewonnen. Kortom, kansverhoudingen én winst/verliesmogelijkheden worden gewogen bij een beslissing te wedden of niet.

De kans (aangeduid met het symbool P) op het gooien van een zes – aangeduid als P(6) – met een dobbelsteen is bij eenmaal (N=1) gooien 1/6. Mag er tweemaal (N=2) worden geworpen dan wordt de kans op het gooien van de zes ogen groter: P(6) = 2×1/6=1/3. De kans op tweemaal een zes gooien met twee worpen is uiteraard kleiner: 1/6×1/6=1/36.

Bij de berekeningen van de kansen op het gooien van 'het kenmerk zes' met één dobbelsteen, hebben we van doen met elkaar uitsluitende kenmerken: immers, als het vlak met zes ogen naar boven ligt, kan er niet tegelijkertijd een vlak met een ander aantal ogen naar boven gericht liggen. In een bevolking (populatie) sluiten kenmerken elkaar echter soms helemaal niet, soms gedeeltelijk uit. Ter illustratie van het laatste: een bevolking kan enerzijds worden ingedeeld in angstigen en niet-angstigen, anderzijds in regelmatige en niet-regelmatige tandartsbezoekers. Het gegeven dat iemand regelmatig een tandarts bezoekt houdt niet in dat hij/zij niet-angstig is. Bij kansberekeningen kan rekening worden gehouden met het gegeven dat een bepaald kenmerk in positieve of negatieve zin (angstig/niet-angstig) aanwezig is. In het nu volgende wordt hierop ingegaan, om te beginnen met een eenvoudig, fictief voorbeeld, dat vervolgens steeds verder wordt uitgewerkt.

Stel dat een pot gevuld wordt met 1.000 geëxtraheerde elementen, 66 incisieven en 934 molaren (tabel I). Als uit deze pot blindelings een element wordt gepakt, dan is de kans dat het een incisief blijkt te zijn natuurlijk P(i)=66/1.000 = 0,066 of bijna 7%.

5. VOORWAARDELIJKE KANSEN

Het kan in het kader van een onderzoek zinvol zijn alleen maar een gedeelte van een 'bevolking' te bestuderen. Een voorbeeld: in de pot met de 1.000 gebitselementen zijn een aantal van de incisieven en molaren gaaf en tonen andere een caviteit. De aantallen zijn in tabel II (een uitbreiding van tabel I) weergegeven.

De N=1.000 elementen in de pot zijn nu op grond van de kenmerken 'type element' en 'cariës' in vier groepen in te delen. Als incisieven worden aangeduid met het symbool 'i^+', molaren met 'i^-', caviteit met 'c^+' en niet-carieus met 'c^-', kunnen de groepen als volgt worden benoemd:

1 incisief én caviteit; de fractie P=(i^+ en c^+);
2 molaar én caviteit; P=(i^- en c^+);
3 incisief én niet-carieus; P=(i^+ en c^-);
4 molaar én niet-carieus; P=(i^- en c^-).

In tabel III zijn deze groepen nogmaals weergegeven, inclusief hun 'randtotalen', alsmede de corresponderende relatieve frequenties van de waarden van tabel II. Als één element uit de pot wordt genomen, vertegenwoordigen deze relatieve frequenties in wezen ook de kansen op het aantreffen van de combinatie van kenmerken.

Wordt blindelings een element uit deze pot genomen, dan kan men zich de volgende vragen stellen:

1. Hoe groot is de kans dat men een incisief heeft gepakt?
2. Hoe groot is de kans dat men een incisief *of* een element met een caviteit heeft genomen?
3. Hoe groot is de kans dat men een incisief te pakken heeft, op voorwaarde dat het element een caviteit toont?
4. De vragen 1 tot en met 3 kunnen natuurlijk eveneens worden gesteld voor een niet-incisief in plaats van voor een incisief. Ook kan worden berekend hoe groot de kans is op het pakken van een carieus (of niet-carieus) element, op voorwaarde dat het een snijtand (of niet-snijtand) is.

ad 1. 66 van de 1.000 elementen zijn snijtanden. Dat een aantal van die elementen ook carieus is, doet niet ter zake; P(i^+) = 0,066.

ad 2. De kans om een snijtand óf een carieus element uit de pot te nemen is een optelling van de relatieve frequenties in tabel 3, in formule:

$$P(i^+ \text{ of } c^+) = P(i^+) + P(c^+) - P(i^+ \text{ en } c^+) \quad \text{(formule 1.1).}$$

Het is duidelijk dat P(i^+ en c^+) moet worden afgetrokken, omdat anders de een aantal incisieven, de carieuze, tweemaal worden geteld. Toepassing van formule 1.1 levert op:

$$P(i^+ \text{ of } c^+) = 0{,}066 + 0{,}126 - 0{,}014 = 0.178.$$

Noot: als de combinatie 'snijtand' en 'carieus' niet in de pot zou voorkomen, dan is P(i^+ en c^+) = 0 en daardoor wordt de kans:

$$P(i^+ \text{ of } c^+) = P(i^+) + P(c^+) \quad \text{(formule 1.2).}$$

Tabel II. Aantallen elementen, onderverdeeld naar de kenmerken 'type element' en 'cariës'.

	Kenmerk 'type element'		
	incisief	molaar	Rij totaal
Kenmerk 'cariës'			
caviteit	14	112	126
niet-carieus	52	822	874
Kolom totaal	66	934	N = 1.000

Tabel III. Kansen (P) op de kenmerken 'incisief' (p = i^+) 'molaar' (P = i^-), 'caviteit' (P = c^+) en 'niet-carieus' (P = c^-) bij aselecte trekking uit een pot met N gebitselementen.

	Kenmerk 'type element'		
	incisief	molaar	Rij totaal
Kenmerk 'cariës'			
caviteit	P(i^+ en c^+) 0,014	P(i^- en c^+) 0,112	P(c^+) 0,126
niet-carieus	P(i^+ en c^-) 0,052	P(i^- en c^-) 0,822	P(c^-) 0,874
Kolom totaal	P(i^+) 0,066	P(i^-) 0,934	P(totaal) = 1 1,00

Tabel IV. Aantallen elementen onderverdeeld naar de kenmerken 'type element', 'cariës' en 'fluoride-gehalte'.

Kenmerk 'cariës'	Kenmerk 'fluoride'	Kenmerk 'type element' snijtand	molaar	Rij totaal
caviteit	F-arm	12	108	120
	F-rijk	2	4	6
niet-carieus	F-arm	50	52	102
	F-rijk	2	770	772
	Kolom totaal	66	934	N = 1.000

Formule 1.1 geeft de algemene somregel van kansen weer en formule 1.2 de speciale somregel van kansen.

ad 3. De vraag hoe groot de kans is bij een greep in de pot dat we een *incisief* te pakken hebben, waarin *tevens een caviteit* aanwezig is, wordt door sommigen intuïtief, maar incorrect beantwoord door deze kans te stellen op 14/1.000 = 0,014. Er wordt echter gevraagd naar een *voorwaardelijke* kans; de voorwaarde is dat alleen elementen met een caviteit in dit geval onze interesse hebben. Als het element dat uit de pot wordt genomen gaaf blijkt te zijn, moet het buiten beschouwing worden gelaten en wordt het teruggelegd in de pot. De teruglegging geschiedt om de verhoudingen tussen de vier groepen niet te veranderen; die verhoudingen zijn gebaseerd op de aanwezigheid van 1.000 elementen in de pot.

De kans dat men een 'incisief' (i^+) te pakken heeft, op voorwaarde dat het element een 'caviteit' toont (c^+), wordt genoteerd als $P(i^+ \mid c^+)$. Deze kans wordt bepaald door het aantal 'caviteit én incisief' (N_{c^+} en $_{i^+}$) te delen door het totale aantal caviteiten (N_{c^+}):

$$P(i^+ \mid c^+) = \frac{N_{i^+ \text{ en } c^+}}{N_{c^+}} = \frac{P(i^+ \text{ en } c^+)}{P(c^+)} \qquad \text{(formule 2.1)}$$

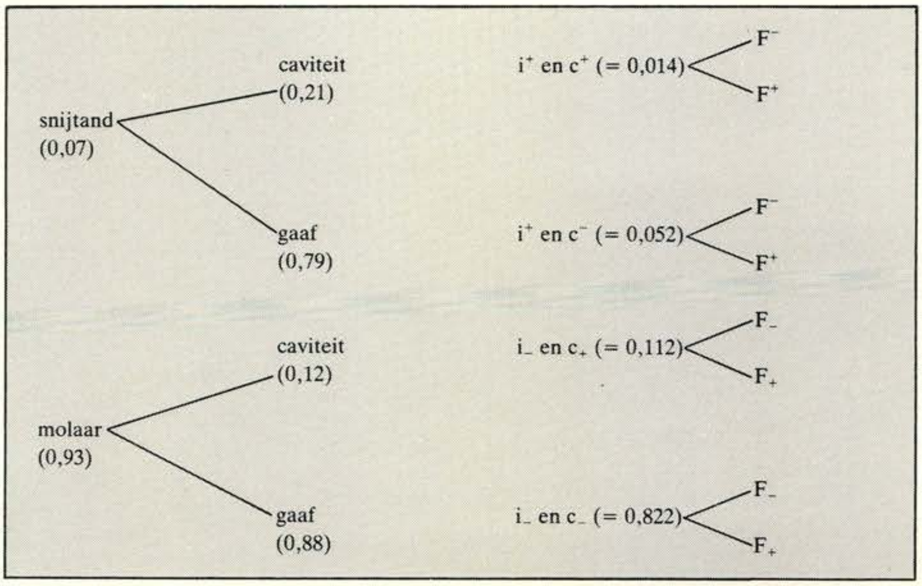
$$\text{Dus: } P(i^+ \mid c^+) = \frac{0{,}014}{0{,}126} = 0{,}111.$$

De kans dat het uit de pot gepakte element met een caviteit een molaar is, wordt: $P(i^- \mid c^+) = 0{,}112/0{,}126 = 0{,}889$, een uitkomst ook te vinden door $P(c^+) - P(i^+ \mid c^+) = 1{,}00 - 0{,}111$, omdat de elkaar uitsluitende kansen op een incisief of molaar complementair zijn.

Formule 2.1 kan anders worden geschreven:

$$P(i^+ \text{ en } c^+) = P(i^+ \mid c^+) . P(c^+) \qquad \text{(formule 2.2).}$$

Tabel V. Voorbeeld van een 'beslisboom'.



Formule 2.2 geeft de algemene produktregel van kansen weer.

ad 4. De wijze van berekenen voor deze vragen is als in het voorgaande voor incisieven is berekend.

6. WIJZIGING VAN EEN KANS[5]

Bayes, een achttiende-eeuwse Schotse geestelijke, vond de oplossing voor het herzien van kansen indien er meer, dat wil zeggen een tweede (nieuw) gegeven, over de onderzochte populatie bekend wordt, zoals het geval was voor de cardioloog (paragraaf 2).

De kans op een snijtand, na bekend worden van een gegeven inzake cariës, in dit geval de aanwezigheid van een caviteit, wordt formeel met (hier qua symbolen aangepaste) formule 3 gevonden. Men kan echter in de praktijk de gevraagde kans vrijwel direct uit een tabel aflezen, zoals hiervoor is gedaan.

$$P(i^+ \mid c^+) = \frac{P(i^+) . P(c^+ \mid i^+)}{P(i^+) . P(c^+ \mid i^+) + P(i^-) . P(c^+ \mid i^-)} \qquad \text{(formule 3).}$$

In formule 3 is:
- $P(i^+ \mid c^+)$ de gevraagde posterior kans (dus de kans op een snijtand, op conditie dat er een caviteit is);
- $P(i^+)$ de a priori kans op i^+ (dus de ongeconditioneerde kans op een snijtand);
- $P(c^+ \mid i^+)$ en $P(c^+ \mid i^-)$ worden 'likelihoods' genoemd (de kansen geassocieerd met het nieuwe gegeven dat er al dan niet een caviteit aanwezig is).

Formule 3 kan na aanpassing ook worden gebruikt om $P(i^+ \mid c^-)$ te berekenen, als ook $P(i^- \mid c^+)$ en $Pi^- \mid c^-)$.

In het voorbeeld van de pot met elementen, mag worden gezegd dat uit tabel I op voorhand (a priori) bekend was dat de kans om een snijtand uit de pot te nemen gelijk is aan 0,066. Door van een 'nieuw' gegeven kennis te nemen, namelijk het al dan niet voorkomen van een caviteit in die elementen (tabel II), wordt de a priori kans gewijzigd. Invulling van de getallen uit tabel II levert een hogere waarde op: 0,111. De berekende posterior kans blijkt groter te worden: in plaats van 6,6% is de kans dat een incisief gepakt is nu 11,1% geworden.

Zulk een 'herziene' kans kan weer worden gebruikt als uitgangspunt (a priori kans) voor wijziging als weer een nieuw feit bekend wordt, bij voorbeeld, door van elk element te bepalen of er veel of weinig fluoride in het glazuur aanwezig was. Tabel IV is een uitbreiding van tabel II.

Wordt nu een element uit de pot genomen dan kan de volgende vraag worden gesteld: hoe groot is de kans dat we een snijtand in handen hebben, *als we een caviteit (c±) voelen en als we weten dat het element F-rijk (F±) is?* Uit de tweede regel van tabel IV is het antwoord direct te vinden:

$$P(i^{+} \mid c^{+} \text{ en } F^{+}) = 0{,}002/0{,}006 = 0{,}33.$$

De formele formule is:

$$P(I^{+} \mid c^{+} \text{ en } F^{+}) = \frac{P(i^{+} \cdot P(c^{+} \text{ en } F^{+} \mid i^{+})}{P(i^{+}) \cdot P(c^{+} \text{ en } F^{+} \mid i^{+}) + P(i^{-}) \cdot P(c^{+} \text{ en } F^{+} \mid i^{-})}$$

De oorspronkelijke kans van 6,6% neemt door kennisname van een eerste nieuw gegeven toe tot 11,1% en wordt door het tweede nieuwe gegeven nog hoger, 33%. Als nu ook nog werd nagegaan welke elementen van snoepers en van niet-snoepers afkomstig zijn, kan ook dat gegeven in de berekeningen worden betrokken en kan de kans weer worden herzien.

Bij deze 'cumulatieve' berekeningen moeten de nieuw verkregen gegevens *onafhankelijk* zijn, om een overschatting te voorkomen. Ter toelichting: de kenmerken 'periapicale radiolucentie' en 'granuloom aanwezig' kunnen een en hetzelfde gegeven zijn en mogen dan niet beide in de herberekening van de kans worden opgenomen.

7. PRESENTATIE

In de literatuur worden de gegevens soms in de vorm van een 'beslisboom' gepresenteerd, waarvan tabel V, een voorbeeld geeft; alleen de getallen uit tabel I en II zijn verwerkt.

8. SLOT

In de geneeskunde wordt de regel van Bayes onder andere gehanteerd bij de diagnostiek. Bij onderzoek naar een ziekte, in ons geval cariës, is het resultaat van een test positief $-P(c^{+})-$ of negatief $-P(c^{-})$, maar de test kan al dan niet gevoelig zijn. De term *sensitiviteit* duidt op de kans dat de test bij aanwezigheid van cariës inderdaad positief uitvalt. Natuurlijk bestaat ook de kans dat de uitkomst van de test vals-negatief is: cariës wordt niet geconstateerd, terwijl deze wel aanwezig is.

Daarnaast onderscheidt men nog het begrip *specificiteit,* waarmee de kans op een negatief onderzoeksresultaat bij afwezigheid van ziekte wordt bedoeld; hier bestaat de vals-positieve kans dat men cariës waarneemt, terwijl die niet aanwezig is. In feite is er in al deze situaties sprake van voorwaardelijke kansen en kan de regel van Bayes worden toegepast.[4] In het in de eerste paragraaf beschreven voorbeeld van de cardioloog werden beide begrippen reeds opgevoerd. *De voorspellende waarde van een positieve uitslag (caviteit) van het mondonderzoek* is analoog aan de berekeningen die voor gegevens van tabel III zijn uitgevoerd. Waar sensitiviteit en specificiteit kenmerkend zijn voor een bepaalde onderzoeksprocedure, hebben zij een voorspellende waarde voor de praktijksituatie. Het hoeft nauwelijks betoog dat de prevalentie van een ziekte, dat wil zeggen de a priori kans, natuurlijk een groot effect heeft op de voorspellende waarde van een positieve (en negatieve) onderzoeksuitslag, zelfs bij gelijkblijvende sensitiviteit en specificiteit.

Elders in dit nummer worden onderzoeksresultaten bekeken, rekening houdend met sensitiviteit en specificiteit.

SUMMARY

PLAYING WITH PROBABILITIES IN DENTISTRY

Key words: Statistics – Bayesian statistics

Dependent from the probabilities of success and failure, one takes risks in daily live. These probabilities are in some instances easily estimated, in other circumstances more difficult to determine. The latter holds especially true in case of 'conditional' probabilities. In regard to dentistry, these probabilities are of importance too; if, for instance, one has to choose between endodontic treatment versus extraction, obliteration of the rootcanal and periapical pathologic processes posses a negative influence on success. This article describes how a probability is changed when a condition datum is assimilated, with use of fictive examples.

LITERATUUR

[1]LUBSEN J. Epidemiologie als wegwijzer bij medisch handelen. Inaugurale rede. Utrecht, 1986.
[2]SCHUURS AHB. Factors associated with regularity of dental attendance. Amsterdam: Academisch proefschrift, 1981.
[3]THODEN VAN VELZEN SK, DUIVENVOORDEN HJ, SCHUURS AHB. Probabilities of success and failure in endodontic treatment: a Bayesian approach. Oral Surg Oral Med Oral Pathol 1981; 52: 85-90.
[4]DE JONGE H, RÜMKE CL, VAN STRIK R. Medische statistiek. Medische Statistiek, Vrije Universiteit, 1984, 6.1-6.6
[5]PHILLIPS LD. Bayesian statistics for social scientists. London: Thomas Nelon and Sons Ltd., 1973, ch. 4.